λεπτομερῶς τὰ πορίσματα τῶν μελετῶν καὶ πειραματικῶν δοκιμῶν ἐπὶ σειρᾶς ὅλης συσκευῶν, ποικίλης κατασκευῆς, κατέληξαν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ἐλαχίστη εἶναι ἡ ἀποτελεσματικότης των, ἐνῷ εἰς τὰς πλείστας τῶν περιπτώσεων μᾶλλον βλάβαι προέκυψαν εἰς τὸν λέβητα κατὰ τὴν ἐφαρμογήν των. ([3])

Πρὸς ἀποφυγὴν ἀνεπιθυμήτων ἀτυχημάτων εἰς τὴν λειτουργίαν τοῦ λέβητος ἐπὶ τῇ ἐφαρμογῇ τῶν ἑκάστοτε ἐμφανιζομένων νέων συσκευῶν προοριζομένων εἴτε διὰ τὴν καταπολέμησιν τοῦ λεβητολίθου, εἴτε τῆς διαβρώσεως, οἱ ἀναφερθέντες ἐρευνηταὶ συνιστοῦν νὰ δοκιμάζεται εἰ δυνατὸν ἐν τῇ πράξει ἡ ἀποτελεσματικότης τῆς συσκευῆς πρὶν ἢ γίνῃ ἀποδεκτὴ εἰς τὴν ἐν λειτουργίᾳ ἐγκατάστασιν ἀτμοπαραγωγῆς.

([3]) Practical Performance of Water Conditioning Gadgets. By B. Q. Welder and E.P. Partridge «Industrial and Engineering Chemistry», 1954, Vol. 46, No 5.

ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΤΗΣ ΟΡΙΑΚΗΣ ΣΤΟΙΒΑΔΟΣ ΡΟΗΣ

Ὑπὸ τοῦ κ. ΝΙΚ. Ν. ΑΜΒΡΑΖΗ, Ἀγρονόμου- Τοπογρ. Μηχανικοῦ Διπλ. Ε.Μ.Π.

Διὰ τοῦ παρόντος, δίδομεν εἰς τὴν διὰ τὴν ροὴν ἐντὸς τῆς «ὁριακῆς στοιβάδος» ἰσχύουσαν μερικὴν διαφορικὴν ἐξίσωσιν τοῦ Prandtl ([1]) μίαν γενικὴν ὁλοκληρώσιμον μορφὴν (16), ἰσχύουσαν δι' ἐπίπεδον, ἀσυμπίεστον, μόνιμον ροήν, πέριξ σώματος ἐκ περιστροφῆς, ἀνεξαρτήτως τῆς εὐσταθείας τῆς ροῆς ταύτης.

Ἡ ὁλοκληρώσιμος αὐτὴ μορφὴ (16) δύναται νὰ μετασχηματισθῇ διὰ καταλλήλους τιμὰς τῶν συντελεστῶν m καὶ n, εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ v. Kármán, τὴν ἐξίσωσιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας καὶ δι' ὡρισμένας περιπτώσεις εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Loitsianskii ([2]).

Ἡ παροῦσα ἐργασία προέκυψεν ἐκ τῆς ἀνάγκης ὅπως προσαρμόσωμεν, διὰ μίαν γενικὴν περίπτωσιν ἀσυμπιέστου ροῆς, τὰς ἐξισώσεις v. Kármán ([3]) μετὰ τῶν ἀναγκαίων σχέσεων τῆς συνεχείας διὰ τὴν περίπτωσιν ταύτην. Προφανῶς μία προσέγγισις, ὅπως ἡ διὰ τῆς μεθόδου Pohlhausen ([4]), θὰ ἔδιδε λύσιν εἰς τὰς ἐξισώσεις v. Kármán, ἀλλὰ ὁ διαχωρισμὸς τῆς στροβιλώδους ἀπὸ τὴν νηματώδη ροὴν ἀφ' ἑνὸς καὶ ἀφ' ἑτέρου ἡ ἐμπειρικὴ ἐφαρμογὴ σχέσεων ἀναφερομένων εἰς τὴν διανομὴν τῶν ταχυτήτων εἰς τὴν συνοριακὴν ζώνην θὰ προσέθετον ἕνα ἐπὶ πλέον ἄγνωστον ἢ ἕνα ἐμπειρικὸν συντελεστὴν εἰς τὴν λύσιν τοῦ ὅλου θέματος.

Βοηθητικαὶ σχέσεις ([5]) αἴρουσαι μερικῶς τὴν ἀοριστίαν, ἐν σχέσει μὲ τὴν συμπεριφορὰν τῶν ταχυτήτων ἐντὸς τῆς «συνοριακῆς στοιβάδος», εἶναι αἱ σχέσεις αἱ ἐπαληθευθεῖσαι πειραματικῶς, ἀναφερόμεναι εἰς τὴν μονοπαραμετρικὴν οἰκογένειαν μιᾶς συναρτήσεως διανομῆς.

Ἡμεῖς ἐδέχθημεν τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Loitsianskii τοιαύτην, τὴν ὁποίαν καὶ ἐγενικεύσαμεν, πολλαπλασιάζοντες τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Prandtl οὐχὶ μόνον ἐπὶ μίαν δύναμιν τῆς ταχύτητος, διὰ τὴν γενικὴν θέσιν τῆς στοιβάδος, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ μίαν δύναμιν τῆς ἀποστάσεως ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας. Ἀκολούθως τὴν προκύπτουσαν ἐξίσωσιν ὁλοκληροῦμεν κατὰ μῆκος τοῦ πάχους τῆς στοιβάδος, λαμβάνοντες οὕτω μίαν γενικὴν σχέσιν διὰ τὴν συμπεριφορὰν τῆς ροῆς ἐντὸς ταύτης, ἀνεξαρτήτου προφανῶς τοῦ στροβιλώδους ἢ μὴ τῆς ροῆς ἐντὸς αὐτῆς.

Τὴν ἀνωτέρω σχέσιν δυνάμεθα νὰ ἀναγάγωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Loitsianskii διὰ μοναδιαίαν ἀπόστασιν, ἀπὸ τῆς ἐπιφανείας, ὑψοῦντες τὴν ἀπόστασιν ἐκ ταύτης εἰς μηδενικὴν δύναμιν, εἰς τὴν ἐξίσωσιν τοῦ Von Kármán διὰ μοναδιαίαν ἀπόστασιν καὶ μοναδιαίαν ταχύτητα καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν τῆς κινητικῆς ἐνεργείας διὰ μοναδιαίαν ταχύτητα.

Τελικῶς ἡ σχέσις (16) περιέχει μόνον μεγέθη, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα πειραματικῶς νὰ ὑπολογίσωμεν, ὅπως τὰ $f=\frac{u}{U}$, y, καὶ τὰ μεγέθη τ καὶ τ_0. Πρέπει νὰ τονίσωμεν, ὅτι ὁ προσδιορισμὸς τῆς διατμητικῆς δυνάμεως διὰ τὴν στροβιλώδη ροήν, βάσει τῶν γνωστῶν, παραμένει εἰσέτι δυσκολώτατος. Πάντως, διὰ τὴν πειραματικὴν ἀπόδειξιν τῆς σχέσεως τῶν τ καὶ τ_0 δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν ταύτην ἐκφραζομένην ὡς : ([6]).

$$\tau_0 = \frac{\Delta r}{l}\frac{r}{2} = \frac{\lambda}{8}\,\varrho \bar{u}^2 = \varrho v_*^2 \quad ([4]) \qquad \tau = \frac{7}{72}\varrho U^2 \frac{d\delta}{dr} \quad ([4])$$

Πειραματικὴν ἐπαλήθευσιν τοῦ τύπου (16) δὲν ἐπετύχομεν, καθόσον τὰ παρ' ἡμῖν μέσα ἐκτελέσεως τοιαύτης φύσεως πειραμάτων εἶναι εἰσέτι ἐλλιπῆ. ([2])

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων Navier-Stokes, δι' ἐπίπεδον ροήν, τὸ διάνυσμα τῆς ταχύτητος δίδεται ὡς:

$$\overline{w} = iu\,(x, y, t) + jv\,(x, y, t) \tag{1}$$

Ἀκολούθως δὲ δι' ἀσυμπίεστον καὶ μόνιμον ροὴν ἔχομεν:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{dr}{dx} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \tag{2}$$

Ἡ ἐξίσωσις ἡ ἀπεικονίζουσα τὴν ροὴν ἐντὸς τῆς «ὁριακῆς στοιβάδος», διὰ σῶμα ἐκ περιστροφῆς, ἐκφράζεται διὰ τῆς σχέσεως (2), ὡς καὶ ἡ ἐξίσωσις τῆς συνεχείας, διὰ τὴν ὡς ἄνω περίπτωσιν, ὑπὸ τῆς μορφῆς: ([7])

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{u}{r}\frac{dr}{dx} = 0 \tag{3}$$

Ἡ πίεσις ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς «ὁριακῆς στοιβάδος», ἐξαρτωμένη μόνον ἐκ τῆς ὁριζοντίας θέσεως τοῦ ἐξεταζομένου τμήματος αὐτῆς, δύναται νὰ θεωρηθῇ γνωστή, γνωστῆς οὔσης τῆς ροϊκῆς συναρτήσεως:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial r}{\partial x} = U\frac{\partial U}{\partial x} \tag{4}$$

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τὰς σχέσεις (3) καὶ (4) καὶ πολλαπλασιάζοντες τὴν ἐξίσωσιν (2) ἐπὶ u^m ἔχομεν: (8)

$$\frac{u^{m+1}}{m+1}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{u}{r}\frac{dr}{dx}\right) + \frac{u}{m+1}\frac{\partial u^{m+1}}{\partial x} + $$

$$+ \frac{\upsilon}{m+1}\frac{\partial u^{m+1}}{\partial y} = u^m\left(U\frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}\right) \tag{5}$$

Ἐν συνεχείᾳ σχηματίζομεν μορφὴν τῆς σχέσεως (5) τοιαύτην, ὥστε ἕκαστος ὅρος τῆς σχηματισθησομένης σχέσεως νὰ μηδενίζεται εἰς τὸ ἄκρον τῆς «ὁριακῆς στοιβάδος», ἤτοι ἕκαστος ὅρος ταύτης νὰ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸν ὅρον $(U^{m+1} - u^{m+1})$

Ἡ σχέσις (5) κατόπιν τῶν ἀνωτέρω γράφεται :

$$\frac{1}{m+1}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)u\right]+$$

$$\frac{1}{m+1}\frac{\partial uU^{m+1}}{\partial x}+\frac{1}{m+1}\frac{\partial \upsilon U^{m+1}}{\partial y}+\frac{1}{m+1}\frac{\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)}{r}u$$

$$\frac{dr}{dx}+\frac{1}{m+1}\frac{uU^{m+1}}{r}\frac{dr}{dx}=u^m U\frac{dU}{dx}+\frac{u^m}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y} \quad \text{ἢ}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)u+\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)\upsilon+$$

$$+\frac{\partial uU^{m+1}}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon U^{m+1}}{\partial y}+\frac{\left(u^{m+1}-U^{m+1}\right)}{r}u\frac{dr}{dx}+$$

$$+\frac{uU^{m+1}}{r}\frac{dr}{dx}=(m+1)\left[u^m U\frac{dU}{dx}+\frac{u^m}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)u-\frac{\partial}{\partial y}\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon+$$

$$+\frac{\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)}{r}(-u)\frac{dr}{dx}=(m+1)\left[\left(u^m U-uU^m\right)\right.$$

$$\left.\frac{d\upsilon}{dx}+\frac{u^m}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}\right] \qquad (6)$$

Παλλαπλασιάζομεν ἀκολούθως τὴν (6) ἐπὶ y^n καὶ ὁλοκληροῦμεν ἀπὸ $\psi=o$ ἕως $\psi=\delta$.

$$-\frac{1}{m+1}\int_o^\delta y^n\frac{\partial}{\partial x}\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)u\,dy-$$

$$-\frac{1}{m+1}\int_o^\delta y^n\frac{\partial}{\partial y}\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon\,dy+$$

$$+\frac{1}{(m+1)r}\frac{dr}{dx}\times\int_o^\delta y^n\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)(-u)\,dy-$$

$$-\frac{dU}{dy}\int_o^\delta y^n\left(u^m U-uU^m\right)dy=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_o^\delta u^m y^n\frac{\partial \tau}{\partial y}dy \qquad (7)$$

ὅτε, κατόπιν ἁπλοποιήσεως δυνάμει τῆς σχέσεως

$$\int_o^\delta y^n\frac{\partial}{\partial x}\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)(-u)\,dy=$$

$$=-\frac{d}{dx}\int_o^\delta y^n\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)u\,dy$$

ἡ ἐξίσωσις (7) γράφεται :

$$-\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}U^{m+2}\int_o^\delta y^n\left[1-\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{m+1}\right]\frac{u}{\upsilon}dy-$$

$$-\frac{1}{m+1}\int_o^\delta y^n\frac{\partial}{\partial y}\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon\,dy-$$

$$-\frac{1}{m+1}\frac{U^{m+2}}{r}\frac{dr}{dx}\int_o^\delta y^n\left[1-\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{m+1}\right]\frac{u}{\upsilon}dy-$$

$$-U^{m+1}\frac{dU}{dx}\int_o^\delta\left[\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^m-\frac{u}{\upsilon}\right]y^n\,dy=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_o^\delta u^m y^n\frac{\partial \tau}{\partial y}dy \qquad (8)$$

Ἀντικαθιστῶντες διὰ τῆς ἴσης της τὴν σχέσιν :

$$\int_o^\delta y^n\frac{\partial}{\partial y}\left(U^{m+1}-\upsilon^{m+1}\right)\upsilon\,dy=$$

$$=-n\int_o^\delta\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon y^{n-1}dy$$

λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν (8) ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$-\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}U^{m+2}\int_o^\delta y^n\left[1-\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{m+1}\right]\frac{u}{\upsilon}dy+$$

$$+\frac{n}{m+1}\int_o^\delta\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon y^{n-1}dy-$$

$$-\frac{1}{m+1}\frac{U^{m+2}}{r}\frac{dr}{dx}\int_o^\delta y^n\left[1-\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^{m+1}\right]\frac{u}{\upsilon}dy-$$

$$-U^{m+1}\frac{d\upsilon}{dx}\int_o^\delta\left[\left(\frac{u}{\upsilon}\right)^m-\frac{u}{\upsilon}\right]y^n\,dy=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_o^\delta u^m y^n\frac{\partial \tau}{\partial y}dy \qquad (9)$$

Ἡ ταχύτης υ δύναται νὰ ἀπαλειφθῇ ἐκ τοῦ ὅρου

$$\int_o^\delta\left(U^{m+1}-u^{m+1}\right)\upsilon y^{n-1}dy \text{ ὡς ἀκολούθως:}$$

Δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν τὴν ταχύτητα υ ὡς

$$\upsilon=\int_o^\delta\frac{\partial \upsilon}{\partial y}dy+\upsilon_0$$

ἢ κατόπιν τῆς ἐξισώσεως τῆς συνεχείας

$$\upsilon=-\int_o^y\frac{\partial u}{\partial x}dy-\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\int_o^y u\,dy+\upsilon_0=$$

$$=\int_o^y\frac{\partial (U-u)}{\partial r}dy-y\frac{dU}{dx}+\frac{1}{r}\frac{dr}{dx}\int_o^y(U-u)\,dy-$$

$$-\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}y+\upsilon_0=\int_o^y\left[\upsilon\frac{\partial\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{dU}{dx}\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)\right]dy-y\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\int_o^y\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)dy-$$

$$-\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}y+\upsilon_0$$

$$\upsilon = U\int_0^y \frac{\partial\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)}{\partial x}dy + \frac{dU}{dx}\int_0^y\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)dy -$$

$$-y\left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\int_0^y\left(1-\frac{u}{\upsilon}\right)dy + \upsilon_0 \qquad (10)$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸν ὅρον $\frac{u}{\upsilon}$ διὰ τοῦ f λαμβάνομεν

$$\upsilon = \upsilon\int_0^y \frac{\partial(1-f)}{\partial x}dy + \left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)\left[\int_0^y(1-f)dy - y\right]+\upsilon_0$$

Ὁ ὅρος

$\int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,\upsilon y^{n-1}dy$ δύναται νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,\upsilon y^{n-1}dy = \int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,y^{n-1}$$

$$\left[U\int_0\frac{\partial(1-f)}{\partial x}dy + \left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)\left[\int_0^y(1-f)\,dy - y\right]+\upsilon_0\right]dy$$

$$\int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,\upsilon y^{n-1}dy = U^{m+2}\int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\left[\int_0^y\frac{\partial(1-f)}{\partial x}dy\right]dy +$$

$$+\left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)U^{m+1}\int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\left[\int_0^y(1-f)\,dy-y\right]dy +$$

$$+\upsilon_0 U^{m+1}\int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\,dy \qquad (11)$$

Ἐὰν τώρα καλέσωμεν

$$Aj^{n+1} = \int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\left[\int_0^y\frac{\partial(1-f)}{\partial x}dy\right]dy$$

$$Bj^{n+1} = \int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\left[\int_0^y(1-f)\,dy\right]dy$$

$$Cj^{n+1} = \int_0^\delta y^{n}(1-f^{m+1})\,dy \text{ καὶ}$$

$$Dj^{n} = \int_0^\delta y^{n-1}(1-f^{m+1})\,dy$$

τὸν ὅρον:

$\int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,\upsilon y^{n-1}dy$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν ὡς:

$$\int_0^\delta (U^{m+1}-u^{m+1})\,\upsilon y^{n-1}dy = U^{m+2}Aj^{n+1} +$$

$$\left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)U^{m+1}(B-C)\,j^{n+1} + \upsilon_0 U^{m+1}Dj^n$$

Ἐὰν δὲ καλέσωμεν

$$Ej^{n+1} = \int_0^\delta y^n(1-f^{m+1})\,f\,dy$$

$$Fj^{n+1} = \int_0^\delta (f-f^m)\,y^n\,dy$$

ἡ ἐξίσωσις (9) γράφεται:

$$-\frac{1}{m+1}\frac{d}{dx}(U^{m+2}Ej^{n+1}) + \frac{n}{m+1}U^{m+2}Aj^{n+1} +$$

$$+\frac{n}{m+1}\left(\frac{dU}{dx}+\frac{U}{r}\frac{dr}{dx}\right)$$

$$U^{m+1}(B-C)\,j^{n+1} + \frac{n}{m+1}\upsilon_0 U^{m+1}Dj^n -$$

$$-\frac{1}{m+1}\frac{U^{m+2}}{r}\frac{dr}{dx}Ej^{n+1} + U^{m+1}\frac{dU}{dx}Fj^{n+1} =$$

$$= \frac{U^m}{\rho}\int_0^\delta f^m y^n \frac{\partial\tau}{\partial y}dy \qquad (12)$$

ἀναπτύσσοντες δὲ τὸν ὅρον

$$\frac{d}{dx}U^{m+2}Ej^{n+1}$$

λαμβάνομεν τὴν τελικὴν μορφὴν τῆς σχέσεως (9), ἤτοι

$$(n+1)E\frac{dj}{dx} + j\left(\frac{dE}{dx} - nA\right) +$$

$$\frac{j}{U}\frac{dU}{dx}\left[E(m+2) - n(B-c) - (m+1)F\right] +$$

$$\frac{j}{r}\frac{dr}{dx}\left[E-n(B-c)\right] - nD\frac{\upsilon_0}{U} = -$$

$$-(m+1)\frac{\tau_0}{\rho U^2}\int_0^{\delta/j} f^m s^n \frac{\partial\frac{\tau}{\tau_0}}{\partial s}ds \qquad (13)$$

ὅπου:

$$s = \frac{y}{j}$$

Ἡ ἐξίσωσις (13) εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως ῥοῆς, διὰ τὴν ὁριακὴν στοιβάδα.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως λαμβάνομεν διὰ

$m=n=0$ τὴν ἐξίσωσιν τοῦ von Kármán, διὰ

$m=1,\ n=0$ » » τῆς κινητικῆς ἐνεργείας καὶ διὰ

$m=0,\ n=1$ » » » ποσότητος κινήσεως.

Εἰς τὴν περίπτωσιν $m=n=0$

$$Ej = \int_0^\delta (1-f)\, f dy = j \qquad \text{ἢ } E=1$$

ἐπίσης
$$Fj = \int_0^\delta (f-1)\, dy = -\delta^* \qquad \text{ἢ } F = -\frac{\delta^*}{j} = -H$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἅπαντα τὰ ὁλοκληρώματα, τὰ συνιστῶντα τὴν ἐξίσωσιν (13) καὶ διὰ τὰ ὅρια ὁλοκληρώσεως ἀπὸ 0 ἕως δ, ἔχουσι περερασμένην τιμήν, τοῦ n τείνοντος εἰς τὸ μηδέν, πλὴν τοῦ D, τὸ ὁποῖον ὅμως τείνει πρὸς τὴν μονάδα, καθ' ὅσον:

$$n\, Dj^n = n \int_0^\delta y^{n-1} (1-f^{m+1})\, dy =$$

$$= \Big[y^n (1-f^{m+1}) \Big]_0^\delta - \int_0^\delta y^n \frac{\partial}{\partial y} (1-f^{m+1}) dy$$

Ὁ πρῶτος ὅρος, διὰ $n \neq o$ ἐκπίπτει. Ὅτε τὸ ὅριον τῆς συναρτήσεως τείνει εἰς τὴν μονάδα:

$$\lim_{n \to o} n\, Dj^n = 1$$

Ἐὰν θέσωμεν $m=n=o$, τότε ἡ σχέσις (12) γράφεται:

$$\frac{dj}{dx} + \frac{j}{U}\frac{dU}{dx}(H+2) + \frac{j}{r}\frac{dr}{dx} - \frac{v_0}{U} = \frac{T_0}{\rho U^2} \qquad (14)$$

Ἡ ὡς ἄνω σχέσις παριστᾷ τὴν ἐξίσωσιν τῆς ποσότητος κινήσεως διὰ ροὴν ὑπεράνω σώματος ἐκ περιστροφῆς, δι' ἐπίπεδον δὲ ροὴν ἡ (14) γράφεται ὡς ἀκολούθως:

$$\frac{dj}{dx} + \frac{j}{U}\frac{dU}{dx}(H+2) - \frac{v_0}{U} = \frac{T_0}{\rho U^2} \qquad (15)$$

Λαμβάνοντες ἐκ τῆς (15) τὴν ἔκφρασιν τοῦ ὅρου $\frac{dj}{dx}$ καὶ ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (12) ἔχομεν:

$$j\left(\frac{dE}{dx} - nA\right) + \frac{j}{U}\frac{dU}{dx}\Big[m(E-F) - n[(B-c) + E(H+2)] - F - EH\Big] - \frac{j}{r}\frac{dr}{dx}\, n\Big[(B-c)+E\Big] - \frac{v_0}{U}\Big[nD - E(n+1)\Big] =$$

$$= -\frac{T_0}{\rho U^2}\left[(m+1)\int_0^{\delta/j} f^m\, s^n \frac{\partial l}{\partial s} ds + (n+1)E\right] \qquad (16)$$

ὅπου

$$l = \frac{T}{T_0}.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1) L. Prandtl: «Ueber Flussigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung». Vier Abhdnlg. zur Hydrodynamik. Göttingen 1927.

2) L. Loitsianskii: «Integral Methods in the theory of the Boundary Layer». C.A.D.O. ATI 1070, 1944.

3) Von Kármán: «Laminare und turbulente Reibung» Zs. F. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, C.A.D.O. σελ. 235, ἔκδοσις 1931.

4) H. Schlichting: «Boundary layer theory» Part I, Trans. of Vortragsreihe W. S. 1942, Luftfahrtforschungsanstalt Herman Göring, Braunschweig.

5) A. Kehl: «Investigation on convergent and divergent turbulent Boundary Layers» R.T.P. No 2035 B.M. A.P., σελ. 293—329.

6) H. Schlichting: «Boundary layer Theory» Part II, σελ. 19—40.

7) C. A. D. O.: Modern Developments in fluid dynamics, Caredon Press, Oxford 1948.

8) E. Hogner: «Kompedium i allmaan hydro-og-aëromekanikk» II uppl. Stoklm. 1952, Kompendiekommittén N.S. 97, σελ. 69—102, Sverige.

9) W. Fellenius: «Vattenbyggnadslaboratoriets vid Kungl. Tekniska Hogsln», Stoklm. 1952.

ΣΥΜΒΟΛΑ

u = Ταχύτης ροῆς ἐντὸς τῆς «ὁριακῆς στοιβάδος»

U = ὡς ἡ u, διὰ τὸ πέρας τῆς «ὁρ. στ.» παράλληλος πρὸς τὴν ὁριακὴν γραμμὴν

v = ταχύτης ροῆς ἐντὸς τῆς «ὁρ. στ.» κάθετος πρὸς τὴν ὁριακὴν γραμμὴν

r = ἀκτὶς γενέσεως τοῦ ἐξεταζομένου σώματος

ρ = πυκνότης κινουμένου ρευστοῦ

τ = διατμητικὴ τάσις.

τ_0 = διατμητικὴ τάσις πέρατος

j = κινητικὸν πάχος στοιβάδος $\quad j = \int f(1-f)\, dy$

δ^* = κινηματικὴ ἐκτροπὴ στοιβάδος $\quad \delta^* = \int (1-f)\, dy$

p = στατικὴ πίεσις

v_* = ταχύτης διατμήσεως $\quad v_* = \sqrt{\overline{u'v'}} = \sqrt{\frac{(\tau)}{\rho}}$

δ = ὑποστοιβὰς νηματώδους ροῆς $\quad = v/Uc\sqrt{Re^*}$